

Gli Alberi non bastano (e neppure i semireticolari)

Una lettura probabilistica dell'inadeguatezza di alberi e semireticolari alla descrizione delle strutture urbane.

JACOPO FIORE¹

Abstract: The famous essay *A city is not a tree* by Christopher Alexander (1965) proposes the use of two mathematical structures, trees and semi-lattices, to describe the urban environment. In particular, Alexander recognizes in the tree structure the key to the failure of many artificial cities, at the same time indicating in the semi-lattice structure the main of spontaneous or natural settlements. In this work we try to show from a quantitative point of view how in reality both structures involve too stringent constraints on urban planning, making it impossible to satisfy both axioms identified by Alexander as the population increases (hence the title). Although these limits have already been highlighted in the literature, we have tried to use an approach as close as possible to the set theory language used by Alexander himself, using probabilistic and combinatorial calculus tools. The results of the work are anticipated by an exposition of how it is possible to describe with the theory of sets the elements of the urban environment that are of primary importance in modeling the problem. Quantitative are followed by a discussion of possible alternative approaches to the urban planning problem presented in the literature.

Keywords: trees, semilattices, probability theory, combinatorics, scaling laws, urban plans, urban growth, mathematical models.

Come è nato questo lavoro e come si inquadra nei tuoi studi?

Sono stato allievo della Scuola Superiore di Studi Avanzati di Sapienza durante il biennio magistrale. Nel mio secondo anno in SSAS (A.A. 2020/21) mi è capitato di focalizzarmi sul tema della città, il che mi ha stimolato in prima battuta a cercare possibili ponti tra l'oggetto del corso e la mia disciplina. Nel secondo semestre, di conseguenza, ho provato a dare ulteriore spazio a questa ricerca all'interno del corso "Cambiamento e continuità nelle metamorfosi urbane"².

1. Studente del XXXVII ciclo di Dottorato in Fisica presso la Sapienza Università di Roma. Nota di redazione: il lavoro svolto è qui presentato in forma di intervista discorsiva, cercando di evidenziare in modo puntuale lo sviluppo del progetto senza includere formule e grafici. Il manoscritto completo è disponibile su richiesta via mail all'indirizzo jacopo.fiore@uniroma1.it.
2. Corso disciplinare della SSAS Scuola Superiore Studi Avanzati Sapienza tenuto dalla prof.

Mi sembrava un'ottima occasione per cercare di mettermi alla prova su un terreno diverso dal solito. Da studente di fisica sono stato abituato ad avere a che fare con definizioni rigorose, approssimazioni controllate e controllabili, formalizzazione di un problema e conseguente soluzione, il tutto in termini quantitativi. Il prezzo dell'essere quantitativi è la semplificazione: bisogna mettere da parte un certo numero di dettagli di un fenomeno per avere in mano un modello che contemporaneamente risponda alle tre caratteristiche che ho prima elencato e che non sia banale. Vogliamo, in sostanza, che il modello messo in piedi sia sì semplice, ma ci riveli qualcosa di nuovo di quanto stiamo studiando. Che rimanga cioè aderente, nonostante la semplificazione, all'oggetto della sua descrizione.

Non sembrerebbe quindi immediato ricercare nella complessità urbana qualcosa di cui occuparsi che soddisfi queste caratteristiche...

Se si cerca di applicare alle città questo approccio in maniera cieca, si va presto a sbattere con la realtà dei fatti. Questo mi è capitato leggendo alcune rassegne molto generali sul tema. Non sembra esistere una definizione rigorosa di città, di elemento urbano, di modello urbano universalmente accettata. È difficile tenere sotto controllo i meccanismi che regolano la dinamicità spaziale e temporale di una città, che la portano cioè ad essere un sistema complesso non solo qui e ora, ma anche nella sua proiezione nello spazio e nel tempo. Il che è fondamentale se vogliamo discutere di "metamorfosi urbana": ogni volta sembra che si perda qualche pezzo. Mancando questi presupposti, sembra quindi molto difficile anche solo formalizzare un problema, prima ancora di provare a trovarne una soluzione.

Qual è stata allora la soluzione?

Partire da un lavoro in cui fossero già individuati degli schemi formali ben precisi, da cui iniziare un piccolo lavoro di ricerca. Ho letto il saggio di Antoine Picon³ sulle smart cities e sono rimasto molto colpito dal suo racconto dell'approccio neocibernetico alla pianificazione urbana venuto fuori ormai più di cinquant'anni fa. Di un modo di

ssa Anna Irene Del Monaco.

3. PICON, 2015.

*concepire lo spazio in cui tutto fosse prevedibile e tenuto sotto controllo, una sorta di Leviatano urbano capace di anticipare le esigenze degli abitanti dislocandoli in posti ben precisi, offrendo loro il servizio giusto al momento giusto. Ho quindi letto il saggio di Christopher Alexander, *A city is not a tree*⁴, nel quale si contestava la funzionalità delle città progettate secondo quella visione, rimanendone molto affascinato.*

Di cosa tratta questo lavoro?

Mi sono concentrato sui due tipi di strutture matematiche che Alexander ha proposto di utilizzare per classificare le città, cioè alberi (trees) e semireticolari (semilattices). Nel suo saggio, Alexander cerca di mostrare come le città artificiali siano state tutte concepite come alberi, mentre le città naturali, o spontanee, possono essere pensate come semireticolari. La differenza principale tra queste due strutture è dovuta principalmente alla possibilità di avere unità sovrapposte (overlapping units) come elementi costitutivi di un semireticolare, cosa che non è prevista nella struttura ad albero. L'obiettivo del lavoro è di mostrare che all'aumentare del numero di unità elementari della città, ad esempio di abitanti, case, negozi e così via, la possibilità di organizzarli in una struttura ad albero o di semireticolare è sempre più piccola. Questo significa che, a conti fatti, la città non può essere concepita né come un albero né come un semireticolare. Tale conclusione è in realtà già stata anticipata da Frank Harary⁵, usando strumenti di teoria dei grafi. Poiché tuttavia le definizioni originali di Alexander sono date con il linguaggio della teoria degli insiemi, ho cercato di dare un'argomentazione alternativa che utilizzi il calcolo combinatorio e probabilistico.

Come tradurre in termini matematici un problema che riguarda elementi urbani e le relazioni che intercorrono tra di loro?

Come suggerisce Alexander, non conta tanto definire in partenza quali siano gli elementi urbani da tenere in considerazione nel costruire un albero o un semireticolare. È sufficiente che li si possa enumerare, cioè farne una lista, e che tale lista sia in corrispondenza biunivoca con i

4. ALEXANDER, 1965, p. 122.

5. HARARY and ROCKEY 1976, p. 8.

numeri naturali. Faccio un esempio. Supponiamo di voler descrivere tre categorie di elementi urbani: gli abitanti di una città, le unità residenziali e i veicoli. Possiamo elencare gli abitanti con i numeri 1, 4, 7 e così via; le unità residenziali con 2, 5, 8, ...; i veicoli con 3, 6, 9 eccetera. Così facendo abbiamo una regola per identificare ogni numero naturale con un corrispondente elemento urbano. Basta dividere il numero per tre e vedere quant'è il resto: 7 diviso 3 fa 2 con il resto di 1, quindi sappiamo che il numero 7 corrisponderà al secondo elemento appartenente alla prima categoria, cioè al secondo abitante della città. Chiaramente il procedimento si estende a un numero di categorie grande a piacere, a seconda di quante sono quelle che riteniamo utili alla costruzione dell'albero o del semireticolato. Avendo a disposizione questo insieme di numeri, dobbiamo capire come identificare delle relazioni tra i diversi elementi urbani. Sempre seguendo Alexander, possiamo sfruttare dei sottoinsiemi dell'insieme che abbiamo appena costruito: ad esempio {1589} può ben descrivere un viaggio quotidiano che il primo abitante (1) compie tra la seconda e la terza unità residenziale (5-8) attraverso il terzo veicolo (9). Così facendo abbiamo la possibilità di elencare le diverse attività che caratterizzano il contesto urbano. Questo è ovviamente un puro esercizio mentale impossibile da svolgere in pratica, ora ci interessa solamente che abbiamo a disposizione in potenza un modo sistematico di organizzare quanto caratterizza la nostra città attraverso degli oggetti formali (numeri, insiemi, sottoinsiemi) che siano trattabili matematicamente.

Cosa hanno di speciale alberi e semireticolati e perché possono descrivere le città secondo Alexander?

Portando a termine il ragionamento fatto finora, possiamo descrivere la città come una collezione di sottoinsiemi del tipo {1589} illustrato prima. Questi sottoinsiemi non saranno chiaramente indipendenti tra di loro, ce ne saranno alcuni che si intersecano, alcuni saranno completamente contenuti in altri, altri ancora saranno disgiunti. La classificazione in alberi e semireticolati avviene distinguendo quali delle evenienze che ho appena elencato sono verificate per una data collezione. Diremo che una collezione è un semireticolato se per ogni coppia di sottoinsiemi che peschiamo al suo interno accade che questi

siano disgiunti o che, se si intersecano, la loro intersezione appartiene alla collezione. D'altra parte, diremo che una data collezione è un albero se di nuovo per ogni coppia di sottoinsiemi i due membri sono disgiunti o sono contenuti l'uno dell'altro. Un esercizio immediato: verificate che l'insieme $\{1,12,134\}$ è un semireticolato e non un albero, mentre l'insieme $\{1,12,124\}$ è un albero. Gran parte del saggio di Alexander è dunque dedicato all'esemplificazione, in contesti urbani specifici, del perché certi agglomerati urbani possano essere descritti attraverso queste due strutture. Nel caso di Brasilia, ad esempio, è possibile riconoscere chiaramente una struttura ad albero, anche solo guardando la sua planimetria. Nel caso di Cambridge, in Inghilterra, è possibile invece rintracciare degli elementi tipici di una struttura a semireticolato andando a seguire gli spostamenti degli studenti universitari tra le diverse parti della città.

Perché allora per te né gli alberi né i semireticolari riescono a descrivere adeguatamente una città?

Nel lavoro a questo punto si vuole calcolare, fissato il numero N di elementi dell'insieme da cui possiamo pescare i nostri sottoinsiemi, quanti possibili alberi e quanti possibili semireticolari siamo in grado di costruire. Questo è un problema matematicamente ben posto, il cui trattamento richiede di usare un po' di calcolo combinatorio e qualche argomento probabilistico. Mi sono soffermato in particolare sul capire come cresce il numero di alberi e semireticolari all'aumentare di N , cioè all'aumentare del numero di elementi costitutivi della città. Ho trovato che se prendiamo in considerazione alberi e semireticolari con un numero arbitrario di elementi, questi crescono in maniera più che esponenziale, ed è un risultato non sorprendente. Mi interessa però più concentrarmi su alberi e semireticolari il cui numero di elementi scala in maniera proporzionale a N^{1+d} , dove d è un numero minore di 1.

Cosa ha di speciale?

Questo tipo di studio è stato fatto ad esempio da Luis Bettencourt⁶ nell'analisi del problema dell'urban planner, per dimostrare che il

6. BETTENCOURT, 2014, p. 2.

numero di possibili assetti urbani che si devono calcolare per ottimizzare una certa funzione di performance della città cresce in modo più che esponenziale con il numero di abitanti. La sua ipotesi, suffragata da dati empirici, è che un possibile piano urbano deve ottimizzare un numero di connessioni, o link diretti, tra i suoi abitanti che scala con N^{1+d} . Diversi indicatori urbani crescono con questa legge a potenza. Difatti, senza imporre che la città debba essere un semireticolo o un albero, si riesce a riprodurre questo risultato: anzi è possibile estenderlo prendendo in considerazione non solo connessioni tra due elementi, ma anche tra tre o più, ottenendo in ogni caso un problema intrattabile dal punto di vista computazionale. Quello che ho trovato è che, imponendo invece le condizioni di Alexander, al crescere del numero di abitanti non è possibile organizzare più gli elementi urbani secondo le strutture da lui individuate. In altre parole, non esistono sufficienti alberi o semireticoli per soddisfare le esigenze di tutti. Questo è un risultato matematicamente chiaro che però va analizzato dal punto di vista pratico.

Come?

Bisogna anzitutto chiarire le definizioni di albero e semireticolo. Mentre per l'albero possiamo essere d'accordo su cosa voglia dire che due sottoinsiemi di unità urbane siano uno contenuto nell'altro, la situazione è diversa nel caso dei semireticoli. In particolare, non è del tutto chiaro che cosa voglia dire che l'intersezione di due sottoinsiemi appartenga alla collezione considerata. Cito l'esempio di Alexander:

«In Berkeley at the corner of Hearst and Euclid, there is a drugstore, and outside the drugstore a traffic light. In the entrance to the drugstore there is a newsrack where the day's papers are displayed. [...] [In this case] one unit consists of newsrack, sidewalk and traffic light. Another unit consists of the drugstore itself, with its entry and the newsrack. The two units overlap in the newsrack. Clearly this area of overlap is itself a recognizable unit and so satisfies the axiom above which defines the characteristics of a semilattice».

Nella mente di Alexander, l'unità risultante dall'intersezione di altre due unità dovrebbe essere riconoscibile come un elemento autonomo della città. Mentre in questo semplice caso di unità con un solo

elemento (l'espositore) è immediato concordare su tale riconoscibilità, nel caso in cui l'intersezione di due unità sia essa stessa composta da due o più elementi la situazione si complica. In tal caso, non dovremmo controllare che ogni elemento della sovrapposizione sia riconoscibile di per sé come parte della città, ma che l'insieme in toto costituisca una parte riconoscibile della città. Gli elementi dovrebbero essere in qualche modo correlati tra loro.

Riesci a fare un esempio?

Pensiamo alle categorie introdotte prima, ovvero abitanti, unità residenziali e veicoli. Consideriamo due abitanti della città, che vivono in due blocchi residenziali diversi, che condividono lo stesso bus per uscire a cena nello stesso ristorante. Abbiamo due insiemi:

$A = \{\text{primo abitante, primo blocco residenziale, autobus, ristorante}\}$

$B = \{\text{secondo abitante, secondo blocco residenziale, autobus, ristorante}\}$

L'intersezione dei due è l'insieme

$A \cap B = \{\text{autobus, ristorante}\}$

Potremmo dire che questa unità di sovrapposizione rappresenta un'entità riconoscibile della città se esiste una fermata dell'autobus posta nelle vicinanze del ristorante. In altre parole, se indipendentemente dal fatto che ci siano i due abitanti che abbiamo considerato, che vivono nelle rispettive abitazioni, è operativa la linea bus con fermata al ristorante, diciamo che l'insieme bus più ristorante appartiene alla città e quindi possiamo costruire un semireticolo con A , B e $A \cap B$.

Dunque anche la città-semireticolo ha una serie di limitazioni intrinseche esattamente come la città-albero?

Sembrerebbe che anche nel caso della struttura a semireticolo debba esserci qualche predisposizione aprioristica della città a soddisfare le possibili sovrapposizioni tra i suoi diversi costituenti. Ammesso che in un certo momento una città soddisfi l'assioma del semireticolo, ci sarà quasi sicuramente un tempo futuro in cui, se nuovi abitanti verranno in città rendendo necessari nuovi blocchi residenziali, l'assioma del semireticolo verrà violato. Questo è in qualche modo un meccanismo

analogo a ciò che fa fallire la struttura ad albero, che si rompe perché a un certo punto alcuni elementi hanno necessità di uscir fuori dal ramo a cui sono assegnati e spostarsi, ad esempio, in una zona diversa della città. Ma questo lo aveva già capito Alexander.

Questa conclusione in qualche modo inficia il messaggio di Alexander?

Se accettiamo l'idea che sia gli alberi che i semireticolari sono inadatti a descrivere la struttura delle città, stiamo in realtà rafforzando l'idea presentata da Alexander. Come notato da Michael Batty⁷, riferendosi al lavoro di Harary che contestava la bontà dei semireticolari, «both Alexander and those who followed up his argument, all tended to agree that cities were eminently more complex structures than strict trees or hierarchies could ever represent in more abstract terms».

Siamo esattamente nella situazione di dover ammettere che le caratteristiche che rendono buona una città nel suo complesso sfuggano alle strutture che abbiamo cercato di mettere a terra per descriverla.

Allora come affrontare in maniera efficace il problema dell'urban planning, ossia di una pianificazione funzionale dello spazio urbano?

Quello che si è visto non implica che in linea di principio si debba rifiutare di adottare qualsiasi schema nell'affrontare il problema urbanistico. Ci sono diversi tipi di soluzioni. Come ricorda Batty, lo stesso Alexander fornisce alcune linee guida pratiche:

«The various components of design could always be linked as a network. [...] Such a network of components – or rather the elements that needed to be fashioned into a design – might be grouped into sub-problems. [...] If a hierarchy based on the intensity of interactions with the most intense involving the smallest numbers of components in subsystems at the bottom of the hierarchy, could be formed, this would provide an order in which to resolve the sub-problems».

Un approccio molto simile è radicato in un modello teorico che è stato recentemente utilizzato⁸ per mostrare come sorgono le leggi di scala

7. BATTY, 2017.

8. LI et al, 2017, p 8

osservate nelle città. In alternativa a questo raggruppamento top-down di istanze dettato dall'intensità delle interazioni tra gli elementi della città, Bettencourt ha proposto una procedura bottom-up che prevede l'utilizzo di informazioni naturalmente presenti nelle città, solitamente denominate big data:

«Decisions and actions by individuals and organizations based on information they obtain in their urban environments effectively solve the planner's problem. They do so by "parallelizing" the problem and its inference and computations through the simultaneous pursuit of local adaptations that, in principle at least, can maximize each agent's preferences under constraints (budgets, knowledge, time, etc.). This self-organizing dynamics is not guaranteed to produce the best outcomes citywide, though».

Anche questa possibile soluzione prevede una messa a sistema delle esigenze delle varie unità urbane, non basata questa volta sull'intensità con cui interagiscono, ma sulla loro vicinanza geografica.

Bibliografia

ALEXANDER 1965

Christopher Alexander, *A city is not a tree*, Architectural Forum, 122 (1965).

HARAY and ROCKNEY 1976

F. Haray and Rockney, *A city is not a semilattice either*; "Environment and Planning A", 8 (1976).

BETTENCOURT 2014

Lui Bettencourt, *The uses of big data in cities*, *Big data*, 2 (2014).

PICON 2015

Antoine Picon, *Smart cities: a spatialised intelligence*, John Wiley & Sons, 2015.

BATTY 2017

Michael Batty, *Beyond hierarchy in city systems and systems of cities*, in *A City is Not a Tree: 50th Anniversary Edition*, M. Mehaffy, ed., Sustain Press, 2017.

LI et al 2017

Ruiqi LI et Al., *Simple spatial scaling rules behind complex cities*, "Nature Communications", 8 (2017).